Tentamen Lineaire Algebra 1, 4 februari 2007

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- **a.** Bepaal de rang van A.
- **b.** Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A.
- **c.** Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = 0$.
- **d.** Laat de vector b gegeven zijn door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

2. Stel $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$, met onbekende $x \in \mathbb{R}^n$. Laat $\mathcal{K}$ de oplossingsverzameling zijn van dit stelsel. $N(A)$ is de oplossingsverzameling van het bijbehorende homogene stelsel $Ax = 0$.

- **a.** Toon aan dat $N(A)$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.
- **b.** Toon aan: als v een vector is in $\mathcal{K}$, dan geldt

$$\mathcal{K} = \{v + w \mid w \in N(A)\}.$$

- **c.** Is $\mathcal{K}$ een deelruimte van $\mathbb{R}^n$? Leg uit.

3. Stel $\mathbb{R}^{n\times n}$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle $n \times n$ matrices M met reële componenten.

a. Wat is de dimensie van $\mathbb{R}^{n\times n}$?

b. Definieer de afbeelding $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ door

$$T(M) = \frac{1}{2}(M^T - M).$$

Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

c. Toon aan: $M \in \ker(T)$ dan en slechts dan als M is symmetrisch.

Stel in de rest van dit probleem $n = 2$. Laat $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ de natuurlijke basis zijn van $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

d. Bepaal de matrix A van T ten opzichte van de basis E.

e. Bepaal de rang van A.

f. Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$.

4. Voor een gegeven positief geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van P_n.

b. Bepaal de dimensie van P_n.

Laat S de deelverzameling zijn van P_n van alle polynomen p met de eigenschap dat $p(0) = 0$.

c. Laat zien dat S een deelruimte is van P_n.

d. Bepaal een basis van S.

e. Bepaal de dimensie van S.

5. Voor elk tweetal vectoren x en y in $\mathbb{R}^n$ noteren we door $x^T y$ het gebruikelijke skalaire product. Stel dat $\mathcal{W}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$. We definieren het *orthogonale complement* $\mathcal{W}^\perp$ *van* $\mathcal{W}$ door:

$$\mathcal{W}^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y = 0 \text{ voor alle } y \in \mathcal{W}\}.$$

a. Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp$ een deelruimte is van $\mathcal{V}$.

b. Bewijs dat $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$.

c. Laat A een matrix zijn zodat $\mathcal{W} = R(A)$. Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp = N(A^T)$.

6. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

b. Bepaal de eigenwaarden van A.

c. Bepaal de eigenvectoren van A

c. Ga na of A diagonaliseerbaar is.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 15
Vraagstuk 2: 15
Vraagstuk 3: 15
Vraagstuk 4: 15
Vraagstuk 5: 15
Vraagstuk 6: 15